

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:

- **NO HAY CONSULTAS.** Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

$$\text{Nota} = 1 + \frac{\text{Puntos}}{10}.$$

Duración = 60 minutos

- 1) [20 ptos] La tasa de cambio del valor de una casa cuya construcción costo \$41 millones puede modelarse por medio de

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{20} \cdot e^{0,05 \cdot t}$$

, donde t es el tiempo en años desde que la casa fue construida y V es el valor (en millones de pesos) de la casa.

a) [10 ptos.] Encuentre $V(t)$.

b) [10 ptos.] ¿En cuánto tiempo la casa valdrá \$100 millones?. **Ayuda:** $\ln(60) \approx 4,1$

- 2) [25 ptos] Resuelva, de manera clara y ordenada, la siguientes integrales indefinidas:

a) [15 ptos] $\int 6x^2 \cdot \arcsin(x) dx$ b) [10 ptos] $\int \tan^{3/2}(x) \cdot \sec^4(x) dx$

- 3) [15 ptos] Resuelva, de manera clara y ordenada, la siguiente integral indefinida:

$$I = \int \frac{2}{3 \sin(x) - 4 \cos(x)} dx$$

Pauta de corrección:

- 1) a) Para encontrar $V(t)$ integramos c/r a t ,

$$V(t) = \frac{1}{20} \int e^{0,05 \cdot t} dt$$

Integrando por sustitución: $u = 0,05t \implies du = 0,05 dt \implies dt = 20 du$

$$V(t) = \frac{1}{20} \int e^u \cdot 20 \cdot du = e^u + C = e^{0,05t} + C \quad [6 \text{ pts}]$$

.....
Para determinar C , veamos el costo inicial de la casa, es decir $V(0) = 41$

$$e^{0,05 \cdot 0} + C = 41 \implies C = 40 \quad [2 \text{ pts}]$$

.....
Luego $V(t) = e^{0,05t} + 40 \quad [2 \text{ pts}]$

-
b) Encontremos t , cuando $V(t) = 100$, o sea:

$$\begin{aligned} V(t) = 100 &\implies e^{0,05t} + 40 = 100 \\ &\implies e^{0,05 \cdot t} = 60 \\ &\implies 0,05 \cdot t = \ln 60 \\ &\implies t = 20 \cdot \ln 60 \approx 81,88689124 \end{aligned}$$

[6 pts]

.....
Por lo tanto, en aproximadamente 82 años, la casa valdrá \$100 millones.

[4 pts]

-
2) a) Por integración por partes, se obtiene:

$$\begin{aligned} u = \arcsin(x) &\implies du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = 6x^2 dx &\implies v = 2x^3 \end{aligned}$$

[4 pts]

.....
Luego

$$\int 6x^2 \cdot \arcsin(x) dx = 2x^3 \cdot \arcsin(x) - \int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

[2 pts]

Para la integral del lado derecho, utilizamos la sustitución $x = \sin(u)$, donde $dx = \cos(u) du$. Así, tenemos:

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int \sin^3(u) du = 2 \int (1-\cos^2(u)) \cdot \sin(u) du = 2 \left(-\cos(u) + \frac{1}{3} \cos^3(u) \right) + C$$

[4 pts]

.....
 como $x = \sin(u)$, resulta que $\cos(u) = \sqrt{1-x^2}$, luego

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = -2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} + C$$

[3 pts]

.....
 Por lo tanto:

$$\int 6x^2 \cdot \arcsin(x) dx = 2x^3 \cdot \arcsin(x) + 2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} + C$$

[2 pts]

b) $\int \tan^{3/2}(x) \cdot \sec^4(x) dx = \int \tan^{3/2}(x) \cdot \sec^2(x) \cdot \sec^2(x) dx$ **[2 pts]**

$$= \int \tan^{3/2}(x) \cdot (1 + \tan^2(x)) \cdot \sec^2(x) dx$$

[2 pts]

$$= \int \tan^{3/2}(x) \cdot \sec^2(x) dx + \int \tan^{7/2}(x) \cdot \sec^2(x) dx$$

[2 pts]

Haciendo $u = \tan(x) \implies du = \sec^2(x) dx$ **[2 pts]**

$$= \frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{9}u^{9/2} + C = \frac{2}{5}\tan^{5/2}(x) + \frac{2}{9}\tan^{9/2}(x) + C$$

[2 pts]

.....
 3) Utilizando los cambios $z = \tan(x/2)$, $\sin(x) = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos(x) = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ y $dx = \frac{2}{1+z^2} dz$
 se obtiene:

$$I = \int \frac{2}{3\sin(x) - 4\cos(x)} dx = \int \frac{1}{z^2 + \frac{3}{2}z - 1} dz = \int \frac{1}{\left(z + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2} dz$$

[5 pts]

.....

Ahora con el cambio $w = z + \frac{3}{4}$, entonces $dw = dz$ o bien con una integral directa, la nueva integral queda:

$$\begin{aligned}
 I = \int \frac{1}{\left(z + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2} dz &= \int \frac{1}{w^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2} dw && \text{[5 pts]} \\
 &= \frac{2}{5} \int \frac{1}{w - \frac{5}{4}} dw - \frac{2}{5} \int \frac{1}{w + \frac{5}{4}} dw && \text{[3 pts]} \\
 &= \frac{2}{5} \ln \left| w - \frac{5}{4} \right| - \frac{2}{5} \ln \left| w + \frac{5}{4} \right| + C = \frac{2}{5} \ln \left| \frac{2 \tan(x/2) - 1}{\tan(x/2) + 2} \right| + C && \text{[2 pts]}
 \end{aligned}$$